RETICOLI DI DIFFRAZIONE

Il reticolo di diffrazione è un componente ottico in grado di deflettere la radiazione luminosa con angoli diversi dipendentemente dalla lunghezza d'onda; ossia un fascio luminoso policromatico che incide su un reticolo di diffrazione viene disperso angolarmente come mostrato in figura 1. In questa figura è mostrato un tipico reticolo funzionante in riflessione, costituito da una serie di specchi, uguali fra loro, disposti secondo una gradinata; il reticolo di diffrazione è pertanto una struttura periodica. Illuminando un reticolo di diffrazione con un'onda piana si osserva un'onda riflessa (come se non fossero presenti le rugosità) ed una componente di diffrazione dovuta alla rugosità.

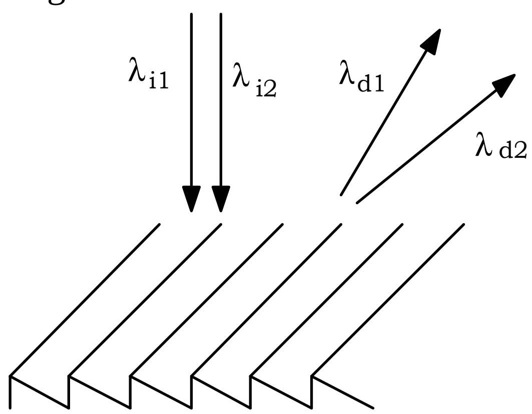

Fig. 1

Esistono anche reticoli funzionanti in trasmissione.

Il reticolo di diffrazione trova applicazione nell'analisi spettrale della radiazione luminosa (spettrometria) e gli strumenti che impiegano questo componente vengono chiamati spettrofotometri a reticolo.

Più recentemente il reticolo ha trovato applicazione negli oscillatori laser per la selezione delle righe di emissione ed in *ottica integrata*.

Principio di funzionamento del reticolo di diffrazione

Si immagini un reticolo costituito da tanti sottili fili metallici equidistanziati e si consideri la situazione in cui la normale al piano del reticolo, la normale ai singoli fili e la direzione di propagazione dell'onda siano complanari. Ogni filo, essendo il metallo riflettente, si comporta da sorgente secondaria (ossia emette se illuminata) con un proprio diagramma di radiazione ed una certa fase. Si deve considerare l'interferenza dovuta ai singoli radiatori secondari.

Per una trattazione completa è necessario considerare un numero grande di radiatori elementari filiformi, tuttavia inizialmente è conveniente vedere cosa avviene per due radiatori elementari puntiformi adiacenti, supponendo che siano illuminati in eguale modo da una sorgente lontana ed uniforme.

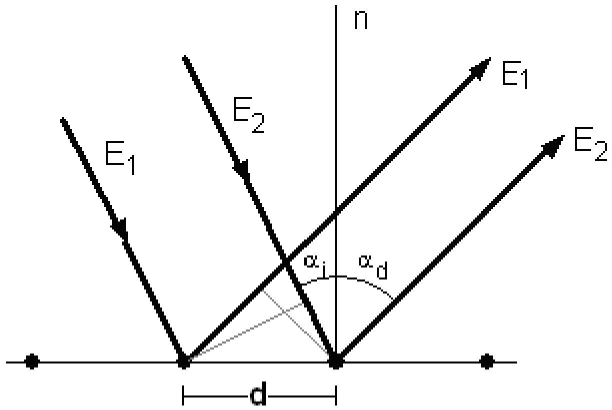

Fig. 2

Con riferimento alla figura 2 si considerino due raggi E_1 ed E_2 che incidono con un angolo α_i sui radiatori 1 e 2, che si suppongono isotropi. Lo sfasamento fra E_1 ed E_2, dopo la diffrazione, è dato da:

$$\phi = \phi_{E_2} - \phi_{E_1} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\alpha_i + \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\alpha_d = \frac{2\pi d}{\lambda}\left(\sin\alpha_i + \sin\alpha_d\right) \qquad (1)$$

Il segno positivo deriva dalla convenzione dei segni. Come si vede nella figura 2, α_i è positivo mentre α_d è negativo.

Se $\phi \neq 2m\pi$, con $m = 0, \pm1, \pm2, ...$, si hanno dei vettori sul piano complesso che non si sommano in fase. Se $\phi = 2m\pi$ si ha il massimo del campo. Ciò vale anche per un insieme N di radiatori. Si ha dunque la somma in fase quando:

$$2\pi \frac{d}{\lambda}\left(\sin\alpha_i + \sin\alpha_d\right) = 2m\pi \qquad (2)$$

con $m=0, \pm1, \pm2, ...$

Per $m=0$ si ha $\alpha_i = - \alpha_d = - \alpha_r$, ossia il raggio è riflesso come per effetto di un comune specchio.

Ricordando che $\alpha_r = - \alpha_i$ la (2) può essere scritta:

$$\sin\alpha_d = \sin\alpha_r + \frac{m\lambda}{d} \qquad (3)$$

Pertanto il termine $m\lambda/d$ rappresenta la variazione, che dipende da λ e da m, della diffrazione rispetto alla riflessione dovuta ad uno specchio.

Si ha quindi contemporaneamente un fascio riflesso e diversi fasci diffratti; l'angolo dei fasci diffratti dipende dalla lunghezza d'onda, il numero dal valore che può assumere m.

Ordine massimo di diffrazione

Per determinare il numero dei fasci diffratti da un reticolo funzionante in riflessione, ossia simile a quello rappresentato in figura 1, conviene considerare un'onda incidente radente alla superficie del reticolo ($\alpha_i = \pi/2$), come indicato in figura 3. L'onda diffratta di ordine maggiore sarà ancora radente ($\alpha_d = \pi/2$) alla superficie del reticolo ma con verso opposto rispetto a quella incidente. Così facendo m assume valori positivi e si evita la confusione che potrebbe essere generata dal doppio segno.

L'avere imposto che $\alpha_i \approx \alpha_d \approx \pi/2$ implica:

$$\sin\alpha_i = \sin\alpha_d = 1$$

e pertanto dalla (2) risulta:

$$m_x = 2d/\lambda$$

La quantità m_x rappresenta il numero dei fasci diffratti per un fascio incidente e viene detto *ordine massimo di diffrazione*.

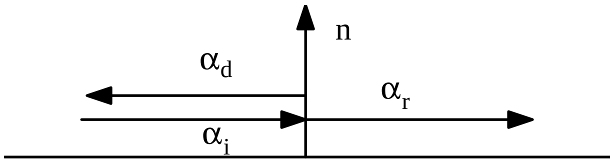

Fig. 3

Si osservi che un reticolo in cui $d<\lambda/2$ si comporta da specchio perché l'ordine massimo di diffrazione è 0; quindi, affinché un reticolo si comporti effettivamente da tale, deve essere verificato che $d> \lambda/2$.

Condizione di Littrow

Esiste la possibilità che un fascio torni indietro su se stesso, escludendo ovviamente il caso di riflessione per incidenza normale; la *condizione (di Littrow)* è che:

$$\alpha_d = \alpha_i \tag{4}$$

Si ha pertanto comportamento da specchio per una sola lunghezza d'onda; in questa situazione il reticolo può costituire uno specchio selettivo per un risuonatore.

Per la (4), la (2) diventa:

$$\frac{m\lambda}{2d} = \sin\alpha_i \tag{5}$$

Distribuzione angolare del campo diffratto

Il campo diffratto E_d dipende dall'angolo α_d sia perché ogni radiatore è caratterizzato da un diagramma di radiazione che non è né uniforme né simmetrico sia per l'interferenza fra gli N radiatori.

In base a queste considerazioni il campo irradiato dal reticolo è:

$$E_d(\alpha_d) = \sum_{n=1}^{N} E_s(\alpha_d)\, e^{-jn\phi} = E_s(\alpha_d) \sum_{n=1}^{N} e^{-jn\phi} \tag{6}$$

avendo supposto che tutti i radiatori hanno lo stesso diagramma di radiazione $E_s(\alpha_d)$; ϕ è lo sfasamento fra i campi emessi da due radiatori adiacenti.

L'angolo ϕ può essere espresso da:

$\phi = 2m\pi + \delta \quad$ con $\quad 0 \le \delta \le 2\pi$ (7)

Per la (7), la (6) diventa:

$$E_d(\alpha_d) = E_s(\alpha_d) \sum_{n=1}^{N} e^{-jn\delta}$$

La rappresentazione grafica della sommatoria sul piano complesso è una poligonale di N segmenti (figura 4); quando N è molto grande e δ è piccolo la poligonale si confonde con un arco di lunghezza N e raggio R. La corda dell'arco è ovviamente la risultante della somma vettoriale.

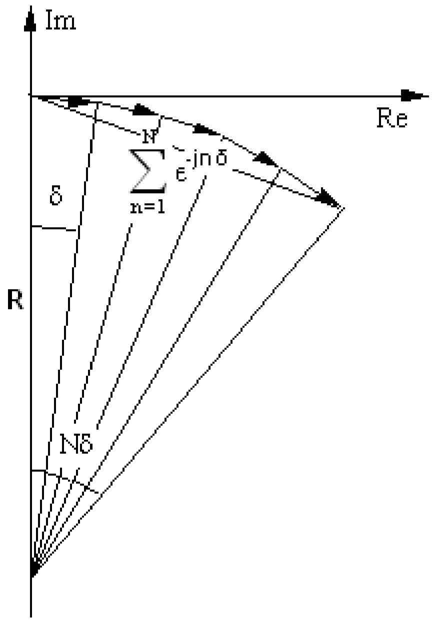

Fig. 4

Dalla figura 4 si ottiene il rapporto corda/arco:

$$\left| \frac{\sum_{n=1}^{N} e^{-jn\delta}}{N} \right| = \frac{2R\sin(N\delta/2)}{2RN\sin(\delta/2)}$$

dalla quale:

$$\left| \sum e^{-jn\delta} \right| = \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \cong \frac{\sin(N\delta/2)}{\delta/2}$$

L'andamento di questa funzione è rappresentato in figura 5.

Il campo diffratto E_d è il prodotto di questa funzione per una funzione "lenta" nella direzione α_d:

$$E_d(\alpha_d) \cong E_s(\alpha_d) \frac{\sin(N\delta/2)}{\delta/2} \qquad (9)$$

dove il primo termine è il fattore di diffrazione del singolo radiatore ed il secondo il fattore di interferenza dell'insieme dei radiatori. Il valore massimo è $E_s(\alpha_d)N$ e l'intensità massima $E_s^2(\alpha_d)N^2$.

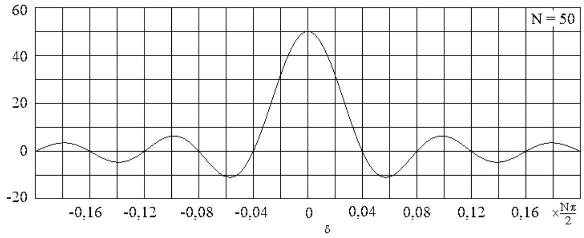

Fig. 5

L'andamento dell'intensità, dato elevando al quadrato la (9), assume la forma indicata in figura 6.

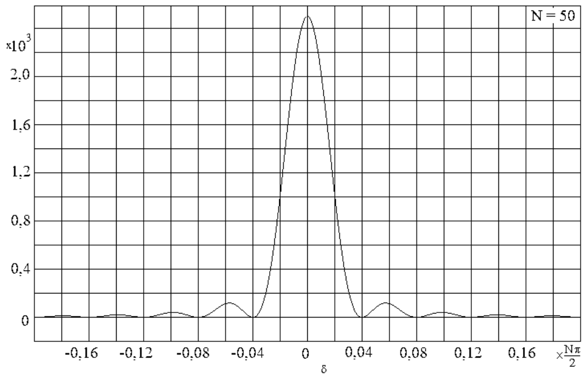

Fig. 6

Il diagramma complessivo dell'intensità diffratta in funzione di α al variare dell'ordine m è rappresentato in figura 7; questo diagramma suppone i radiatori isotropi.

A titolo di esempio si supponga di inviare un'onda ad incidenza normale; gli angoli per i quali si ha interferenza costruttiva sono dati dalla (3) con $\alpha_i = \alpha_r = 0$:

$$\sin\alpha_d = m\frac{\lambda}{d} \qquad (10)$$

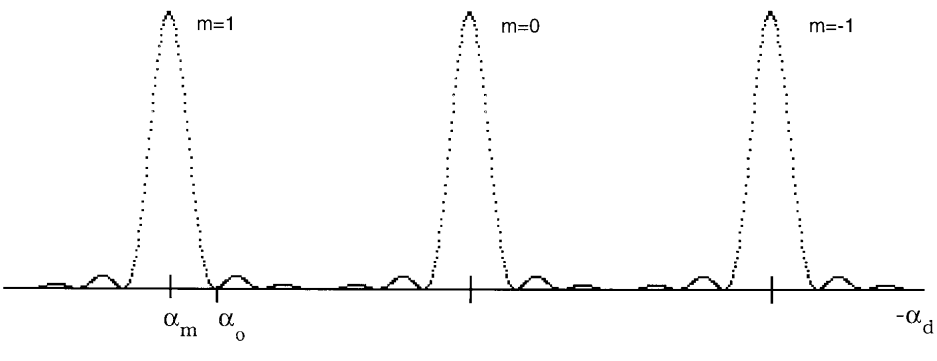

Fig. 7

Questi angoli sono stati determinati graficamente (ipotizzando $d/\lambda=4$) in figura 8a.

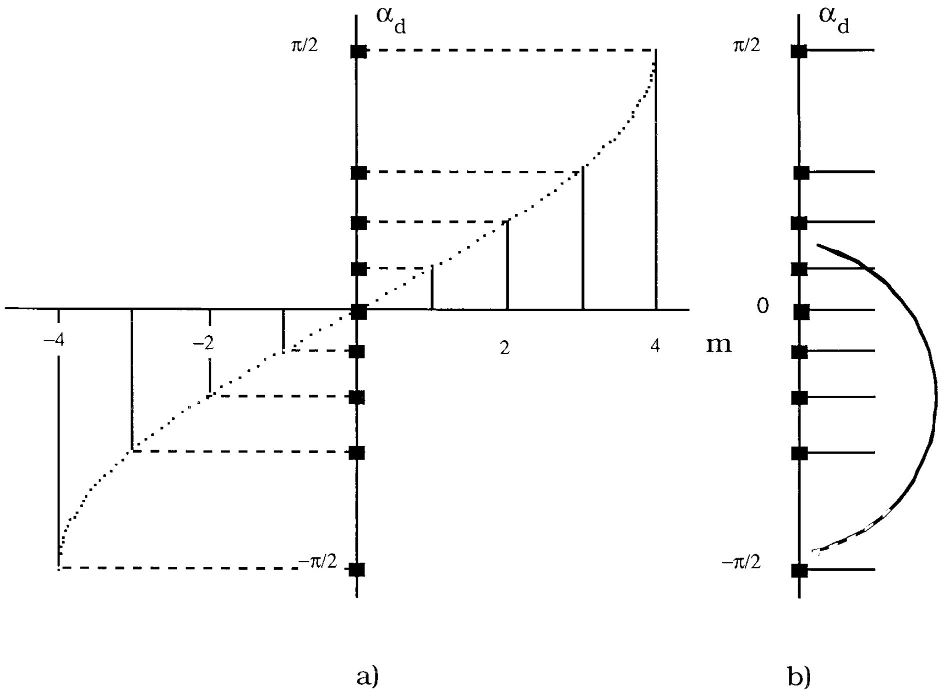

Fig. 8

Per quanto riguarda il fattore di interferenza i massimi sono uguali ma non equidistanti. Si deve tenere inoltre presente il diagramma di radiazione $E_s(\alpha_d)$ del singolo radiatore che ha, ad esempio, una curva del tipo di quella riportata in figura 8b. La curva tracciata favorisce il fascio individuato da m = -2. Il posizionamento di questa curva "lenta" viene effettuato, ad esempio, orientando opportunamente il profilo dei solchi del reticolo.

Banda del reticolo

Si definisce *banda del reticolo* la distanza angolare fra il massimo ed il primo minimo della funzione intensità.

La relazione di fase (1), con Φ dato dalla (7), diventa:

$$\sin\alpha_d = -\sin\alpha_i + \frac{m\lambda}{d} + \frac{\delta\lambda}{2\pi d}$$

Definendo α_m l'angolo α_d quando si ha il massimo di interferenza costruttiva ($\delta=0$):

$$\sin\alpha_m = -\sin\alpha_i + \frac{m\lambda}{d} \tag{11}$$

e definendo α_0 l'angolo α_d relativo a quel valore di δ che dà il primo zero nel diagramma di radiazione:

$$\sin\alpha_0 = -\sin\alpha_i + \frac{m\lambda}{d} + \frac{\delta\lambda}{2\pi d} \tag{12}$$

Dalla (9), affinché si annulli E_d e quindi si ottenga α_0, deve essere $\sin(N\delta/2)=0$, ossia (al primo zero): $\delta=2\pi/N$. Di conseguenza la (12) diventa:

$$\sin\alpha_0 = -\sin\alpha_i + \frac{m\lambda}{d} + \frac{\lambda}{Nd} \tag{13}$$

Sottraendo alla (13) la (11):

$$\sin\alpha_0 - \sin\alpha_m = \frac{\lambda}{Nd}$$

Il primo termine rappresenta il differenziale del seno e poiché $\cos\alpha_m \approx \cos\alpha_0 \approx \cos\alpha_d$ si ha:

$$\cos\alpha_d(\alpha_0 - \alpha_m) = \frac{\lambda}{Nd}$$

Di conseguenza la distanza angolare tra la direzione del massimo di radiazione ed il primo zero è:

$$\alpha_0 - \alpha_m = \frac{\lambda}{Nd\cos\alpha_d} = \frac{\lambda}{D\cos\alpha_d} = \frac{\lambda}{a} \tag{14}$$

essendo D=Nd la lunghezza del reticolo ed "a" la lunghezza del reticolo proiettata normalmente alla direzione della radiazione diffratta; la quantità "a" viene detta *apertura del radiatore equivalente*. Quindi la banda non dipende dal numero N dei radiatori, ma dall'estensione che questi coprono (considerazioni analoghe valgono, a lunghezze d'onda maggiori, per le antenne).

Dispersione e risoluzione cromatica del reticolo

La (11), scritta per due lunghezze d'onda diverse a pari ordine m, diventa:

$$\sin\alpha_{m2} = -\sin\alpha_i + m\frac{\lambda_2}{d}$$

$$\sin\alpha_{m1} = -\sin\alpha_i + m\frac{\lambda_1}{d}$$

Operando la differenza fra queste due quantità si ha il differenziale del seno:

$$\sin\alpha_{m2} - \sin\alpha_{m1} = \cos\alpha_d(\alpha_{m2} - \alpha_{m1}) = (\lambda_2 - \lambda_1)\frac{m}{d}$$

quindi:

$$\alpha_{m2} - \alpha_{m1} = m\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d\cos\alpha_d} \tag{15}$$

Questa è la *dispersione del reticolo*, cioè quanto discrimina il reticolo due lunghezze d'onda.

Si ammette che due lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 possano essere discriminate quando, come mostrato in figura 9, è verificata la condizione:

$$\alpha_{m2} - \alpha_{m1} \geq \alpha_0 - \alpha_m \tag{16}$$

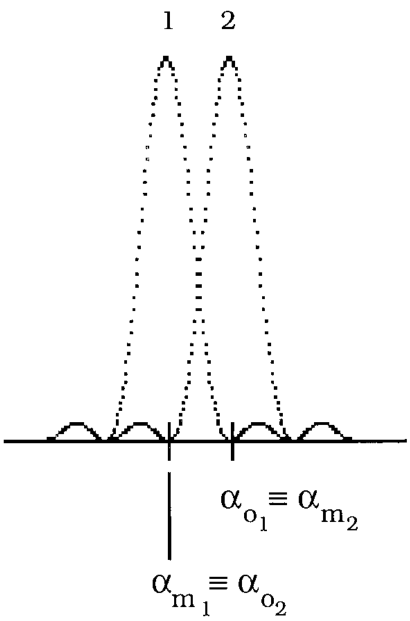

Fig. 9

Da questa è possibile trovare la minima variazione della lunghezza d'onda che può essere risolta che si indica con $(\lambda_2 - \lambda_1)_{min} = \Delta\lambda$

Dalla (16), le (14) e (15):

$$m\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)_{min}}{d\cos\alpha_d} = m\frac{\Delta\lambda}{d\cos\alpha_d} \geq \frac{\lambda}{Nd\cos\alpha_d}$$

da cui:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \geq \frac{1}{mN}$$

La quantità $\Delta\lambda/\lambda$ è chiamata *potere risolvente* o *risoluzione cromatica* del reticolo. Si confronti questo risultato con l'analogo ottenuto per i risuonatori Fabry-Perot.

Si osservi che lo stesso reticolo su un ordine superiore è più selettivo.

Criteri di progetto di un reticolo adatto a selezionare le righe di un laser

Il reticolo sostituisce uno specchio piano del risuonatore, ossia deve essere posto in una zona dove il fascio gaussiano ha fronte d'onda piano, ossia nella vita del fascio. Si vuole che per una certa lunghezza d'onda il fascio torni indietro su se stesso, ossia deve essere verificata la condizione di Littrow:

$$\frac{m\lambda}{2d} = \sin\alpha_i = \sin\alpha_d \tag{5}$$

Il reticolo deve comportarsi in modo tale che torni indietro soltanto questa lunghezza d'onda; ossia il fascio relativo alla lunghezza d'onda indesiderata (λ_2) deve spostarsi tanto da non sovrapporsi a quello relativo alla desiderata (λ_1) per non meno di un raggio trasversale W_u; in altri termini la dispersione del reticolo (16) deve essere maggiore dell'angolo W_u/Z_u, dove Z_u è la distanza fra il reticolo e lo specchio di uscita, ossia:

$$m\frac{\lambda_2-\lambda_1}{d\cos\alpha_d}\geq\frac{W_u}{Z_u}$$

Sostituendo d ottenuto dalla condizione di Littrow (5) e ricordando che $\alpha_i = \alpha_d$:

$$\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1}2\tan\alpha_d\geq\frac{W_u}{Z_u}$$

Da questa si ricava l'angolo α_d:

$$\alpha_d\geq\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{W_u}{Z_u}\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)$$

Si deve anche evitare che gli ordini di diffrazione contigui a quello adoperato soddisfino contemporaneamente la condizione di Littrow per altre lunghezze d'onda di oscillazione del laser ossia, con riferimento alla figura 10:

$$\alpha''_{m+1}-\alpha''_{m}\cong\alpha'_{m+1}-\alpha'_{m}>\alpha'_{m}-\alpha''_{m}\cong\alpha'_{m+1}-\alpha''_{m+1}\tag{17}$$

dove gli angoli con l'apice ' e " sono riferiti agli estremi del campo delle lunghezze d'onda nel quale il mezzo attivo consente le oscillazioni.

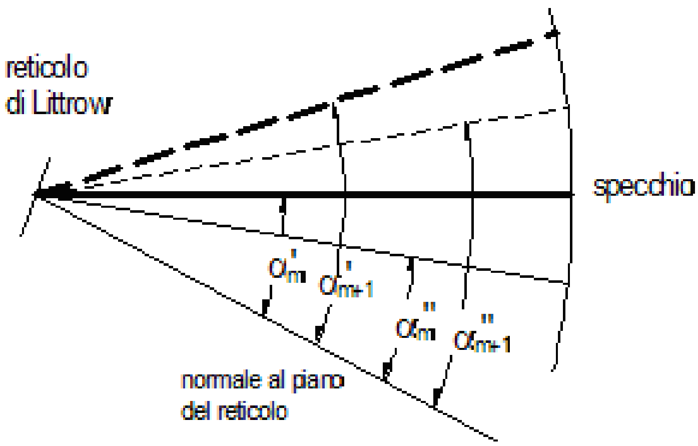

Fig. 10

Per la condizione di Littrow (5):

$$\sin\alpha''_{m+1}-\sin''\alpha_m\cong\sin\alpha'_{m+1}-\sin'\alpha_m\cong\frac{\lambda''}{2d}\cong\frac{\lambda'}{2d}\cong\frac{\lambda}{2d}$$

e da questa, essendo il primo termine il differenziale del seno:

$$\alpha''_{m+1}-\alpha''_{m}\cong\alpha'_{m+1}-\alpha'_{m}\cong\frac{\lambda}{2d\cos\alpha_m}\tag{18}$$

Sempre per la condizione di Littrow:

$$\sin\alpha'_{m}-\sin\alpha''_{m}=\frac{m}{2d}(\lambda'-\lambda'')$$

e da questa, essendo il primo termine il differenziale del seno:

$$\alpha'_m - \alpha''_m \cong \frac{m}{2d\cos\alpha_m}(\lambda' - \lambda'') \tag{19}$$

Sostituendo le (18) e (19) nella (17) si ottiene:

$$m < \frac{\lambda}{\lambda' - \lambda''}$$

Mediante questa si determina il valore di m.

Dalla condizione di Littrow (5), assegnato m, è possibile determinare il passo del reticolo:

$$d = \frac{m\lambda}{2\sin\alpha_d}$$

Da questa si osserva che il segno di m deve essere positivo.

Si deve poi costruire il reticolo in modo tale che il diagramma di radiazione del singolo radiatore abbia il massimo nella direzione individuata da α_d.

Ricordando poi che in un fascio gaussiano il 99% dell'energia è confinata in un'area il cui diametro è pari a $3W_0$, l'*apertura del radiatore equivalente*, così come definita nella (14), deve essere uguale o maggiore a $3W_0$:

$Nd \cos\alpha_d = a \geq 3W_0$

Poiché con un reticolo non è possibile ottenere riflettività molto elevate, la soluzione di selezione delle righe di oscillazione mediante un reticolo di diffrazione va bene soltanto per i sistemi ad alto guadagno.

Utilizzo del reticolo di diffrazione negli analizzatori di spettro ottico

Per analizzare lo spettro emesso da una sorgente luminosa è possibile usare un prisma disperdente, basato sulla proprietà che l'indice di rifrazione cambia lentamente al variare della lunghezza d'onda. Poiché però la dispersione dei materiali dielettrici è piuttosto piccola, la risoluzione che si riesce ad ottenere è bassa. Utilizzando un reticolo di diffrazione è possibile raggiungere risoluzioni nettamente più elevate. Risoluzioni ancora più elevate possono essere ottenute utilizzando risonatori ottici accordabili (risonatore di Fabry-Perot) che tuttavia sono adatti all'analisi di campi spettrali piuttosto limitati.

Il reticolo di diffrazione può essere progettato facilmente in modo tale da soddisfare le specifiche richieste sia per quanto riguarda la *risoluzione* che il *campo spettrale* e quindi su di esso sono basati parecchi strumenti ottici commerciali che vengono comunemente chiamati spettrometri. Un esempio classico di spettrometro (di Czerny-Turner) è riportato in figura 10.

Lo specchio sferico più in alto raccoglie la luce divergente che proviene dalla fenditura ("slit") di ingresso e la trasforma in un fascio collimato (ossia che non più divergente, o quasi) largo che illumina uniformemente il reticolo. La luce diffratta è raccolta dello specchio sferico più basso e focalizzata sulla fenditura di uscita. Mediante la rotazione del reticolo è possibile far si che una banda molto limitata attorno ad una certa lunghezza d'onda attraversi la fenditura di uscita. La banda dipende dalla larghezza della fenditura di uscita. Tuttavia anche la fenditura di ingresso influenza la banda. Infatti il sistema ottico costituito dai due specchi sferici crea l'immagine dell'oggetto "fenditura di ingresso" sulla fenditura di uscita. Se l'oggetto è grande anche la sua immagine è grande e quindi l'analisi con una fenditura piccola non aumenta la risoluzione ma riduce soltanto l'energia trasmessa. Quindi affinché uno spettrometro funzioni in modo corretto è necessario che entrambe le fenditure abbiano la stessa larghezza.

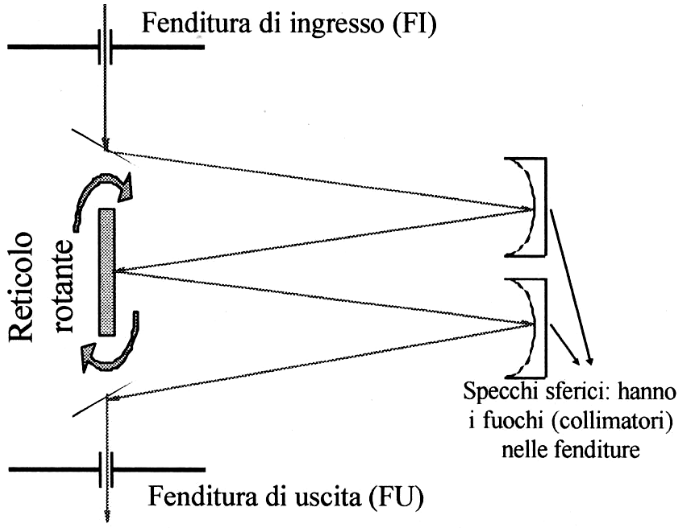

Fig. 10

Immediatamente dopo la fenditura di uscita si può sistemare un fotorivelatore e quindi per ogni lunghezza d'onda, correlata alla posizione angolare del reticolo, è possibile individuare l'intensità. Più modernamente si mantiene il reticolo fisso e si sostituisce alla fenditura di uscita un insieme lineare di fotorivelatori, piccoli e vicini fra loro (CCD). In questo modo si ha, in tempo pressoché reale, la distribuzione spettrale della sorgente da esaminare.

Si utilizza una fenditura anziché un foro circolare per aumentare l'energia luminosa che raggiunge l'uscita dello strumento dove in genere è sistemato il rivelatore e che può avere una notevole estensione lungo la fenditura. Infatti la risoluzione dello spettrometro è influenzata soltanto dalla larghezza della fenditura, non dalla sua lunghezza perché lungo quest'ultima non à presente l'effetto della diffrazione.

Se nello spettrometro con due fenditure si mette in ingresso una sorgente a banda larga si ottiene in uscita luce a banda stretta la cui lunghezza d'onda può essere scelta agendo sulla posizione angolare del reticolo di diffrazione; in questo caso lo strumento prende il nome di *monocromatore*.

Nel disegno di figura 10 gli specchi (piani) posti in prossimità delle fenditure hanno la sola funzione di dirigere i fasci nella giusta direzione. Si osservi che con la disposizione di figura il fascio in uscita è allineato al fascio in ingresso.

Tipi di reticolo

I reticoli cui si è fatto riferimento sino ad ora sono reticoli unidimensionali in riflessione ma esistono anche reticoli bidimensionali, ossia con due ordini di solchi, reticoli in trasmissione unidimensionali e bidimensionali ottenuti per annerimento a righe di substrati trasparenti. Esistono in natura anche reticoli tridimensionali che danno tre ordini di fasci diffratti; si pensi infatti alle strutture cristalline dove il passo è la distanza interatomica; poiché questa distanza è minore della lunghezza d'onda visibile è necessario adoperare lunghezze d'onda minori, cioè raggi X.

Reticolo di diffrazione generato da onde acustiche superficiali

Un'onda acustica (ossia che, a differenza delle onde elettromagnetiche, ha bisogno di un mezzo di supporto) che si propaga in un dielettrico genera una periodica compressione e rarefazione del mezzo con conseguente variazione dell'indice di rifrazione. Un'onda acustica stazionaria che si genera sulla superficie di un dielettrico crea un reticolo di diffrazione caratterizzato da un passo che dipende dalla frequenza dell'onda acustica. E' possibile realizzare un modulatore utilizzando reticoli così fatti.

Problemi

1 - Dati due fasci a lunghezza d'onda λ_1 e λ_2 che incidono con lo stesso angolo su un reticolo, stabilire quale delle due lunghezze d'onda è maggiore noto che, a pari ordine, $|\alpha_{d1} - \alpha_r| > |\alpha_{d2} - \alpha_r|$

2 - Per un reticolo con 5000 solchi/cm illuminato ad incidenza normale determinare la separazione angolare fra fasci diffratti del 2° ordine fra le lunghezze d'onda di 400 e 600 nm.

3 – E' richiesto un reticolo in riflessione che deve risolvere lunghezze d'onda vicine separate di 0,02 Å nel secondo ordine ed in prossimità della lughezza d'onda di 350nm. La radiazione luminosa incide normalmente alla superficie del reticolo. Il costruttore è in grado di realizzare reticoli estesi 10 cm. Determinare:

a) il numero minimo di solchi/cm richiesto, b) l'angolo di diffrazione, c) la dispersione espressa in nm/gradi.

4 - Progettare un reticolo adatto a selezionare le righe di un laser ad anidride carbonica delle seguenti caratteristiche: $\lambda \approx 10\mu m$, $(\lambda_2 - \lambda_1)_{min}/\lambda = \Delta\lambda/\lambda = 10^{-3}$, $W_u = 5mm$, $Z_u = 1{,}5m$, $\lambda'' - \lambda' = 1\mu m$.

Bibliografia

F.L. Pedrotti, L.S. Pedrotti: Introduction to optics, Prentice-Hall